ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΕΠΙΦΑΝΕΙΩΝ

⊛ Παραμετρήσεις της μορφής $X(u,v)=(u,v,f(u,v))$ με $\{u,v,f(u,v)\}$ γράφημα της $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ και $f(x,y)=z$ καλούνται παραμετρήσεις τύπου **Monge**. Προφανώς και οι παραμετρήσεις της μορφής $X(u,v)=(g(u,v),u,v)$, $X(u,v)=(u,h(u,v),v)$ είναι **Monge**.

Ασκηση 1

Να αιτιολογηθεί γιατί το ελλειψοειδές

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1\right\} \text{ με } a\cdot\beta\cdot\gamma>0$$

είναι κανονική επιφάνεια.

Στη συνέχεια να βρεθεί μια παραμέτρηση τύπου Monge όπου να περιέχει το σημείο $(a,0,0)$

ΛΥΣΗ

Έστω η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ τύπου:

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2} \text{ λεία}$$

$1\in f(\mathbb{R}^3)$ και $S=f^{-1}(1)$.

Διαπιστώνουμε ότι για κάθε (x,y,z) εν $\mathbb{R}^3$:

$$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=\left(\frac{2x}{a^2},\frac{2y}{\beta^2},\frac{2z}{\gamma^2}\right)$$

το $(0,0,0)$ κρίσιμο σημείο της f.

Αλλά, $(0,0,0)\notin f^{-1}(1)=S \Rightarrow f$ κανονική επιφάνεια.

Για το σημείο $(a,0,0)\in S$

$$\nabla f\Big|_{(a,0,0)}=(f_x,f_y,f_z)\Big|_{(a,0,0)}=\left(\frac{2}{a},0,0\right)\neq(0,0,0)$$

Επιλύοντας την ισότητα του ελλειψοειδούς ως προς x

$x=\pm a\sqrt{1-\frac{y^2}{\beta^2}-\frac{z^2}{\gamma^2}}$. Έτσι, η ζητούμενη παραμέτρηση Monge που περιλαμβάνει στην εικόνα της το $(a,0,0)$ είναι η $X:U\to\mathbb{R}^3$

$U = \{(u,v) \in R^2 : 1 - \frac{u^2}{\beta^2} - \frac{v^2}{\gamma^2} > 0\}$

$X : U \to R^3$ τύπου $X(u,v) = (g(u,v), u, v)$ όπου

$g : U \to R$ τύπου $g(u,v) = a\sqrt{1 - \frac{u^2}{\beta^2} - \frac{v^2}{\gamma^2}}$.

Άσκηση 2

Έστω η απεικόνιση $X : U \to \mathbb{R}^3$, με $U = \mathbb{R} \times (0, \pi)$

$X(u,v) = (a \cdot \cos u \cdot \sin v, \beta \cdot \sin u \cdot \sin v, \gamma \cdot \cos v)$.

i) Νδο είναι κανονική παραμετρική επιφάνεια (ελλειψοειδές)

ii) Να περιγραφούν οι u και v-παραμετρικές καμπύλες

ΛΥΣΗ

i) Το U ανοιχτό $\subseteq \mathbb{R}^2$ και X λεία απεικόνιση

$X_u = (-a \sin u \sin v, \beta \cos u \cdot \sin v, 0)$

$X_v = (a \cos u \cos v, \beta \sin u \cdot \cos v, -\gamma \cdot \sin v)$

$\|X_u \times X_v\| = (-\beta\gamma \cos u \cdot \sin^2 u, -a\gamma \cdot \sin u \cdot \sin^2 v, -a\beta \cdot \sin v \cdot \cos v) \neq (0,0,0)$

ii) u-παραμετρικές καμπύλες:

Για $v = v_0 =$ σταθ. αυτές είναι οι τομές του ελλειψοειδούς με το επίπεδο $z = \gamma \cos v$.

Άρα, είναι ελλείψεις της μορφής:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = \sin^2 v$$

v-παραμετρικές καμπύλες:

Για $u = u_0 =$ σταθ. αυτές είναι οι τομές του ελλειψοειδούς με τα ημιεπίπεδα $x = a \cdot r \cdot \cos u$, $y = \beta r \sin u$ όπου $r > 0$. Είναι συνεπώς ημιελλείψεις

Άσκηση 3

Να αποδειχθεί ότι (χωρίς άμεση εφαρμογή του ορισμού ή του θεωρήματος κρίσιμων σημείων) το υπερβολικό παραβολοειδές: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$ $(a\beta \neq 0)$ είναι μία κανονική επιφάνεια.

ΛΥΣΗ

Έστω η διαφορίσιμη απεικόνιση $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ τύπου $f(x,y) = \frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2}$

Γνωρίζουμε ότι όλα τα γραφήματα είναι κανονικές επιφάνειες. Άρα, αρκεί νδο $S = G_f$ το οποίο είναι προφανές αφού $z = f(x,y)$.

β' τρόπος.

Έστω η απεικόνιση $X(u,v) := (a(u+v), \beta(u-v), 4u \cdot v)$, $(u,v) \in \mathbb{R}^2$ για $u = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{\beta}\right)$ και $v = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{\beta}\right)$.

Η X λεια $\rightsquigarrow$ Η X 1-1 με $(u,v) \in S$

Η X επί του S (θεωρώντας τυχόν $(x,y,z) \in S$ τότε $X(u,v) = (x,y,z)$)

$\exists X^{-1}: S \to \mathbb{R}^2$ με $X^{-1}(x,y,z) = \left(\frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right), \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{\beta}\right)\right)$ συνεχής

Άρα, X ομοιομορφισμός

Τέλος, $X_u = (\alpha, \beta, 4u)$ και $X_v = (a, -\beta, 4u)$

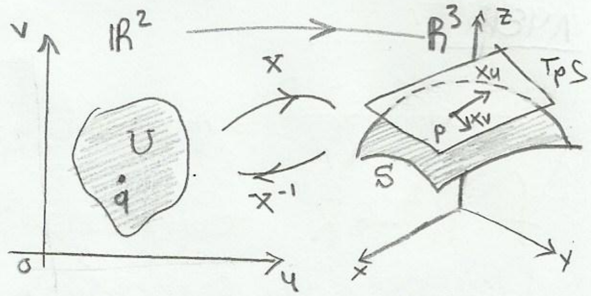
Έτσι, $X_u \times X_v = (4\beta(u+v), 4a(v-u), -2\alpha\beta) \neq 0$, $a \cdot \beta \neq 0$

Άρα, η X ορίζει παραμέτρηση ή $X: \mathbb{R}^2 \to S \subseteq \mathbb{R}^3$ συστ. συντ/νων και συνεπώς η S κανονική επιφάνεια.

Ασκηση 4

Να βρεθεί η καρτεσιανή εξίσωση του εφαπτόμενου χώρου και του εφαπτομένου επιπέδου στο σημείο $P=(1,2,5)$ της παραμετρημένης επιφάνειας:

$X(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$



ΛΥΣΗ

__Α' τρόπος:__ Έστω $q = X^{-1}(p) = (1,2)$

Τότε $X_u\big|_q = (1,0,2)$, $X_v\big|_q = (0,1,4) \Rightarrow X_u \times X_v\big|_q = (-2,-4,1)$

Εφόσον ο εφαπτόμενος χώρος παράγεται από τα X_u και X_v (στο σημείο q) και $X_u \times X_v \perp T_pS \Rightarrow$

$\Rightarrow \langle (x,y,z), X_u \times X_v\big|_q \rangle = 0$ η εξίσωση (καρτεσιανή) του T_pS ή των τυχόντων σημείων του T_pS.

Άρα, $\langle (x,y,z), (-2,-4,1) \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{2x+4y-z=0}$ $*$

Από την άλλη αφού το επίπεδο διέρχεται απ' το p, τότε θα έχει την εξίσωση:

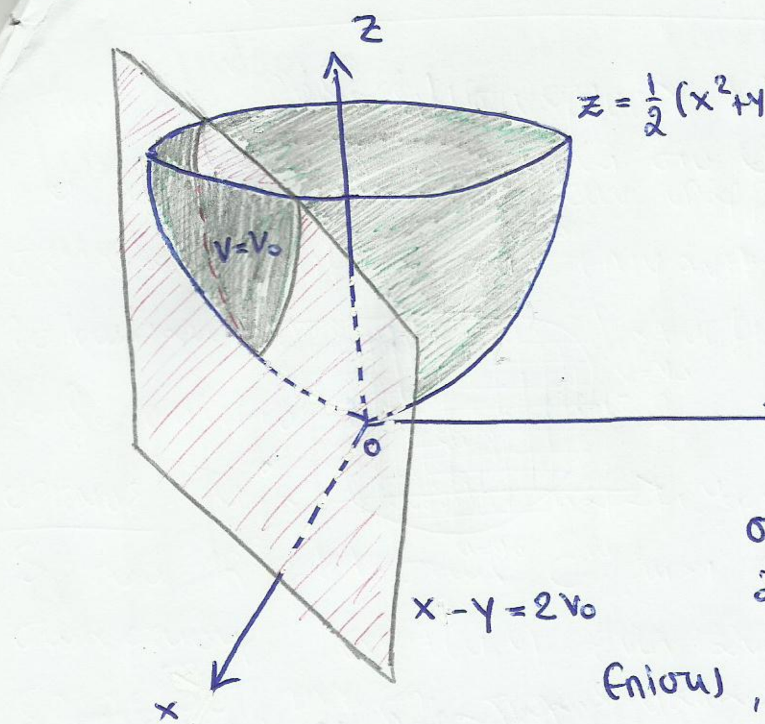
$\langle (x,y,z)-(1,2,5), (-2,-4,1) \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{2x+4y-z=5}$ $**$

__Β' τρόπος:__ Αφού $\{X_u(q), X_v(q)\}$ βάση του T_pS τότε

$T_pS = \{ \lambda X_u(q) + \mu X_v(q) \,/\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}^2 \} = \{ (\lambda, \mu, 2\lambda+4\mu) \,/\, \lambda,\mu \in \mathbb{R}^2 \}$

Έτσι, για τυχόν $(x,y,z) \in T_pS$, $\exists \lambda,\mu \in \mathbb{R}^2$ ώστε
$(x,y,z) = (\lambda, \mu, 2\lambda+4\mu) \Rightarrow x=\lambda$, $y=\mu$, $\boxed{z=2x+4y}$ $*$

Όσο για το εφαπτόμενο επίπεδο: $E_p = p + T_pS \Rightarrow$
$\Rightarrow \boxed{z=2x+4y-5}$ $**$



• Έστω διανυσματική συνάρτηση $X(u,v)=(u+v,\ u-v,\ u^2+v^2)$ με πεδίο ορισμού το επίπεδο uv (δηλ. όλο το $\mathbb{R}^2$) και πεδίο τιμών το παραβολοειδές:
$z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ (όπως στο σχήμα).

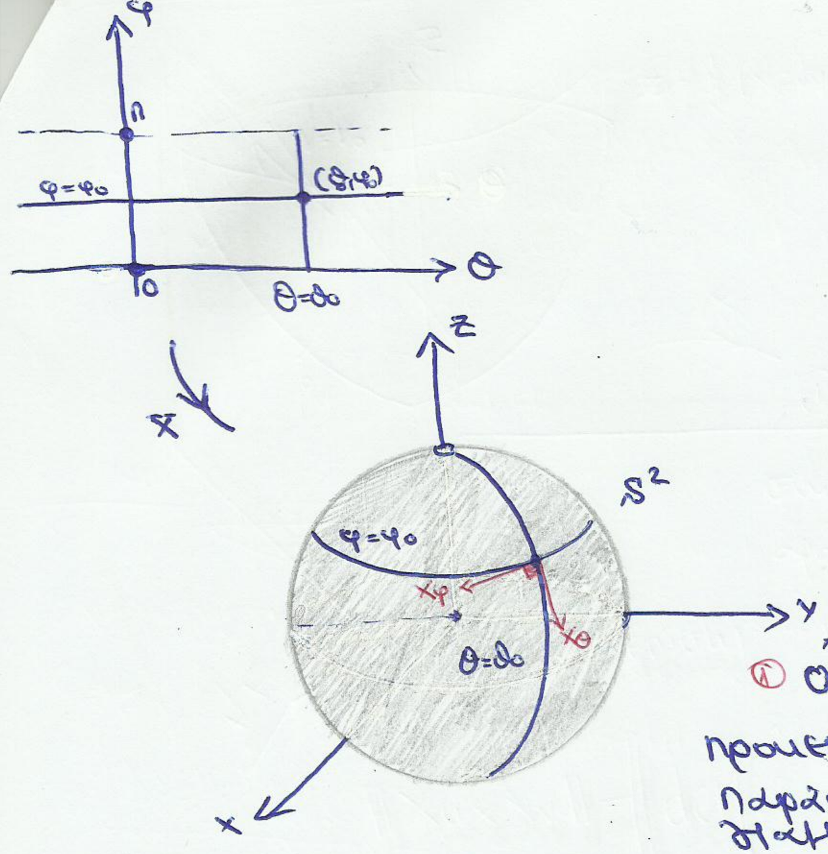
① Παρατηρούμε ότι η X έχει συνεχείς μερικές παραγώγους και άρα είναι C^∞.

Επίσης, $\forall (u,v)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε ότι:

$$\|X_u\times X_v\|=\left\|\det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3\\ 1 & 1 & 2u\\ 1 & -1 & 2v\end{pmatrix}\right\|=\left(4+8(u^2+v^2)\right)^{1/2}\neq 0$$

-Άρα, η X είναι μία κανονική παραμετρική παράσταση του παραβολοειδούς κλάσεως C^∞.

② Για την εύρεση της u-παραμετρικής καμπύλης και έχοντας τους περιορισμούς $x=u+v_0$, $y=u-v_0$ των συντεταγμένων συναρτήσεων της X, απαλοίφοντας το u η u-παραμετρ. καμπύλη $v=v_0$ είναι η τομή του παραβολοειδούς και του κατακόρυφου επιπέδου $x-y=2v_0$. Όμοια για την εύρεση της v-παραμετρικής καμπύλης και έχοντας τους περιορισμούς $x=u_0+v$ και $y=u_0-v$ των συντεταγμένων συναρτήσεων της X, απαλοίφοντας το v η v-παραμετρ. καμπύλη $u=u_0$ είναι η τομή του παραβολοειδούς και του κατακόρυφου επιπέδου $x+y=2u_0$.



Έστω η διανυσματική συνάρτηση με τύπο:

$X(\theta,\varphi) = (\cos\theta\sin\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\varphi)$

όπου έχει πεδίο ορισμού το επίπεδο θφ και πεδίο τιμών τη μοναδιαία σφαίρα:

$\|X\|^2 = x^2+y^2+z^2 = 1.$

Και εδώ η X έχει συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης.

① Όμως παρατηρούμε ότι δεν προκύπτει για κανονική παραμετρική παράσταση της S^2 κατά μήκος των γραμμών $\varphi = \pm\pi n$, $n=0,1,\dots$

$$\|X_\theta \times X_\varphi\| = \left\| \det\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ -\sin\varphi\sin\theta & \cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \cos\theta\cos\varphi & \sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi \end{pmatrix} \right\| =$$

$$= \|(-\cos\theta\sin^2\varphi, -\sin\theta\sin^2\varphi, -\sin\varphi\cos\varphi)\| = \sqrt{\sin^2\varphi} = |\sin\varphi| = 0.$$

Οπότε, εάν η απεικόνιση περιοριστεί στη λωρίδα $-\infty<\theta<\infty$, $0<\varphi<\pi$ έτσι γίνεται κανονική παραμετρική παράσταση της σφαίρας κλάσεως C^∞ από την οποία θα έχουμε αφαιρέσει το βόρειο και το νότιο πόλο (όπως στο σχήμα).

② Οι θ-παραμετρικές καμπύλες $\varphi=\varphi_0$ (οι παράλληλοι (πλάτους)) προκύπτουν ως τομές της σφαίρας με τα οριζόντια επίπεδα $z = \cos\varphi_0$

Οι φ-παραμετρικές καμπύλες $\theta=\theta_0$ (οι μεσημβρινοί (μήκους)) προκύπτουν ως τομές της σφαίρας με τα επίπεδα (που περιέχουν τον άξονα z): $x\cdot\sin\theta_0 - y\cdot\cos\theta_0 = 0$

Παρατηρούμε ότι οι μεσημβρινοί και οι παράλληλοι τέμνονται ορθογώνια αφού: $\langle X_\theta, X_\varphi\rangle = 0$